



TITLE:

複数窓口集団サービス(待ち行列理論とその周辺)

AUTHOR(S):

石川, 明彦

CITATION:

石川, 明彦. 複数窓口集団サービス(待ち行列理論とその周辺). 数理解析研究所講究録 1986, 596: 263-276

ISSUE DATE:

1986-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99539>

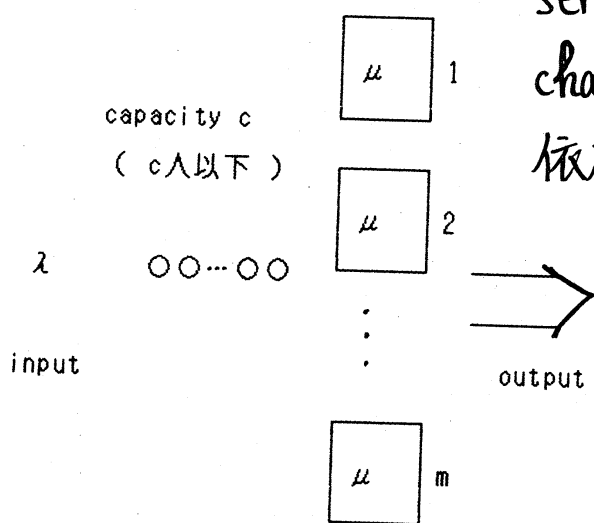
RIGHT:

複数窓口集団サービス

岩手大学人文社会科学部 石川明彦 ISHIKAWA Akihiko

Model 客の到着: 率 λ の Poisson 到着.

Service: capacity c (c 人以下) の m 個の service channels があり, 各 service channel での service 時間は, 客数に依存しない 率 μ の指数 service.



解折点

1. 待ち行列内容数に関する平衡解.
2. 3種類の方程式の関連.

3. 混雑尺度, 同時確率及び推移確率.

この小論では, 昨年に引き続き, 上記の Model に対し, 「団子現象」に注目し数値計算の結果を報告する.

1. 待ち行列内容数に関する平衡解

μ, m, c を固定すれば, 平衡状態が存在する為の必要条件として, 平均到着間隔の範囲は $\lambda < mc\mu$ で与えられる. この条件の下で, 待ち行列内容数が n である平衡確率を Q_n , 待ち客数が居ないとき service 中の channel の数が k channels である平衡確率を S_k ($k=0, 1, \dots, m$) とする. S_k, Q_n に関する次の平衡方程式を得る.

$$(1) \quad (\lambda + k\mu)S_k = (k+1)S_{k+1} + \lambda S_{k-1} \quad (S_{-1}=0, 0 \leq k \leq m-1)$$

$$(2) \quad (\lambda + m\mu)S_m = m\mu(Q_1 + Q_2 + \dots + Q_c) + \lambda S_{m-1}$$

$$(3) \quad (\lambda + m\mu)Q_n = m\mu Q_{n+c} + \lambda Q_{n-1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$(4) \quad \sum_{k=0}^m S_k + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n = 1$$

(ただしこのとき, $S_m = Q_0$ と表すできる.)

これを解くと容易に次の結果を得る.

$$S_k = S_0 \cdot \frac{(mcr)^k}{k!} \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad Q_n = b^n S_m \quad (n=0, 1, \dots)$$

$$\text{ただし } r = \frac{\lambda}{mc\mu}, \quad S_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(mcr)^k}{k!} + \frac{(mcr)^m}{(1-b)m!} \right]^{-1}$$

であり, b は $b^c + b^{c-1} + \dots + b^2 + b = cr$ の単位円内の零点として与えられる数である.

2. 3種類の方程式の関連

この b に関する方程式を得るのに, いろいろな方法(手段)がある.

1) 確率ベクトル x_e を作り, $x_e = T x_{e-1}$ を導き, 再帰行列 T の絶対値が 1 以上の固有値の固有ベクトルを利用する方法.

この方法で得られる式は, T の固有方程式で, 次の式と同値である.

$$(5) \quad C(y) = |yI - T| = y - \left(\frac{cr}{1+cr-y} \right)^c \quad \left(\begin{array}{l} \text{単位円外の} \\ \text{零点} \end{array} \right)$$

$$(6) \quad Q_n = K_n \sum_{j=1}^c h_j x_j^i \text{ と解の「形」を想定したとき, } x_j \text{ に}$$

関する補助方程式として, (2), (3) より

$$(6) \quad x^c + x^{c-1} + \dots + x^2 + x = cr$$

を得る. このとき単位円内の零点を必要とする.

1) Takács が提示した $L-S$ 変換の関係式として得る,

$$(7) \quad z^c = B^*[\lambda(1-z)] \quad (B \text{ は service 分布})$$

$$= \frac{1}{1+cr(1-z)}$$

は, $r < 1$ のとき 単位円内に $(c-1)$ 個, 単位円外に 1 個の零点の存在を示している.

上記 (5), (6), (7) は本質的に同値な方程式で,

$y = x^c$ とすれば (5) \Leftrightarrow (6), $z = 1/x$ とすれば, (6) \Leftrightarrow (7)

$z^c = 1/y$ とすれば (5) \Leftrightarrow (7) が導かれる. このとき単位円を境いにく根(零点)は, そのまゝ対応する.

3. 混雑尺度, 同時確率 及び 推移確率

1) 混雑尺度

* R_1 : server の稼働率 full稼働にあれば, 客は mc 人 service 出来る. それに対し, 現在何人 service 中かに注目した尺度.

$$R_1 = 1 - [P_0 + \{ (mc-1)P[1] + (mc-2)P[2] + \dots + P[mc-1] \} / m]$$

ただし $P[k]$ は k 人 service 中の平衡確率とする.

この R_1 の値は, service 中の客をも含めた平衡確率を計算しなければ算出できない値であるが, 実は $R_1 = r = \lambda / mc\mu$ である.

* R_2 : service 窓口の稼働率

$$R_2 = 1 - [S_0 + \{ (m-1)S_1 + (m-2)S_2 + \dots + S_{m-1} \} / m]$$

* R_3 : 待ち行列で待つ確率 (待つされる確率)

$$R_3 = 1 - P\{W_q = 0\} = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} S_k$$

* R_4 : 次の service 開始時以降も待つされる確率
(俗に言う信号 1 回以上待つ確率)

$$R_4 = R_3 - \sum_{n=0}^{c-1} Q_n$$

次の数表がわかるように、このような複教定口集団サセスのモデルでは、 r, R_2, R_3 といった従来の尺度では、不適当と思われる。 R_4 は、 m, c にあまり左右されない尺度と云える。

$m=2 \quad c=2$

r	R_2	R_3	R_4	b	S_0	Q_0
0.025	0.049989	0.004751	0.000011	0.047723	0.904772	0.004524
0.050	0.099849	0.018017	0.000151	0.091608	0.818319	0.016366
0.075	0.149327	0.038369	0.000673	0.132456	0.739716	0.033287
0.100	0.198119	0.064472	0.001881	0.170820	0.668234	0.053459
0.125	0.245921	0.095105	0.004079	0.207107	0.603263	0.075408
0.150	0.292458	0.129180	0.007542	0.241620	0.544263	0.097967
0.175	0.337502	0.165744	0.012498	0.274597	0.490739	0.120231
0.200	0.380872	0.203978	0.019128	0.306226	0.442234	0.141515
0.225	0.422437	0.243193	0.027563	0.336660	0.398320	0.161319
0.250	0.462110	0.282814	0.037890	0.366025	0.358593	0.179297
0.275	0.499847	0.322374	0.050153	0.394427	0.322679	0.195221
0.300	0.535636	0.361500	0.064364	0.421954	0.290227	0.208964
0.325	0.569493	0.399900	0.080507	0.448683	0.260913	0.220472
0.350	0.601456	0.437350	0.098544	0.474679	0.234438	0.229749
0.375	0.631579	0.473684	0.118421	0.500000	0.210526	0.236842
0.400	0.659929	0.508786	0.140071	0.524695	0.188928	0.241828
0.425	0.686581	0.542577	0.163419	0.548809	0.169416	0.244806
0.450	0.711615	0.575012	0.188385	0.572381	0.151782	0.245886
0.475	0.735115	0.606069	0.214885	0.595445	0.135838	0.245188
0.500	0.757166	0.635749	0.242834	0.618034	0.121417	0.242834
0.525	0.777850	0.664065	0.272150	0.640175	0.108366	0.238947
0.550	0.797249	0.691046	0.302751	0.661895	0.096548	0.233646
0.575	0.815443	0.716727	0.334557	0.683216	0.085840	0.227048
0.600	0.832508	0.741149	0.367492	0.704159	0.076133	0.219262
0.625	0.848517	0.764359	0.401483	0.724745	0.067326	0.210394
0.650	0.863537	0.786406	0.436463	0.744990	0.059332	0.200541
0.675	0.877635	0.807340	0.472365	0.764911	0.052070	0.189797
0.700	0.890870	0.827212	0.509130	0.784523	0.045471	0.178245
0.725	0.903302	0.846073	0.546698	0.803840	0.039469	0.165965
0.750	0.914983	0.863973	0.585017	0.822876	0.034007	0.153031
0.775	0.925963	0.880961	0.624037	0.841641	0.029034	0.139508
0.800	0.936290	0.897084	0.663710	0.860147	0.024504	0.125460
0.825	0.946006	0.912388	0.703994	0.878405	0.020375	0.110942
0.850	0.955153	0.926916	0.744847	0.896424	0.016610	0.096006
0.875	0.963767	0.940710	0.786233	0.914214	0.013176	0.080700
0.900	0.971885	0.953811	0.828115	0.931782	0.010041	0.065067
0.925	0.979537	0.966255	0.870463	0.949138	0.007180	0.049146
0.950	0.986756	0.978079	0.913244	0.966288	0.004567	0.032973
0.975	0.993568	0.989316	0.956432	0.983240	0.002180	0.016581

m=2 c=3

r	R2	R3	R4	b	S0	Q0
0.025	0.074946	0.010407	0.000004	0.069790	0.860516	0.009681
0.050	0.149260	0.038294	0.000085	0.130688	0.739774	0.033290
0.075	0.221815	0.078883	0.000496	0.184622	0.635253	0.064319
0.100	0.291434	0.127919	0.001619	0.233038	0.545051	0.098109
0.125	0.357179	0.181864	0.003866	0.277010	0.467506	0.131486
0.150	0.418434	0.237947	0.007604	0.317339	0.401080	0.162438
0.175	0.474892	0.294118	0.013118	0.354634	0.344333	0.189813
0.200	0.526501	0.348939	0.020598	0.389365	0.295937	0.213074
0.225	0.573388	0.401470	0.030150	0.421901	0.254694	0.232089
0.250	0.615801	0.451144	0.041810	0.452536	0.219542	0.246985
0.275	0.654055	0.497669	0.055559	0.481510	0.189559	0.258037
0.300	0.688499	0.540946	0.071343	0.509017	0.163948	0.265595
0.325	0.719486	0.581004	0.089079	0.535220	0.142032	0.270039
0.350	0.747359	0.617958	0.108672	0.560256	0.123239	0.271743
0.375	0.772441	0.651969	0.130018	0.584240	0.107086	0.271062
0.400	0.795031	0.683229	0.153009	0.607272	0.093168	0.268323
0.425	0.815397	0.711939	0.177540	0.629435	0.081144	0.263819
0.450	0.833785	0.738300	0.203510	0.650805	0.070730	0.257810
0.475	0.850410	0.762507	0.230822	0.671446	0.061687	0.250525
0.500	0.865466	0.784745	0.259384	0.691414	0.053814	0.242161
0.525	0.879123	0.805189	0.289112	0.710760	0.046942	0.232893
0.550	0.891533	0.823997	0.319927	0.729528	0.040931	0.222869
0.575	0.902829	0.841317	0.351756	0.747757	0.035659	0.212216
0.600	0.913128	0.857282	0.384533	0.765485	0.031026	0.201046
0.625	0.922535	0.872014	0.418195	0.782742	0.026944	0.189452
0.650	0.931141	0.885624	0.452687	0.799557	0.023342	0.177517
0.675	0.939027	0.898210	0.487957	0.815958	0.020156	0.165308
0.700	0.946264	0.909863	0.523956	0.831967	0.017334	0.152887
0.725	0.952917	0.920664	0.560642	0.847608	0.014829	0.140302
0.750	0.959042	0.930687	0.597974	0.862898	0.012602	0.127599
0.775	0.964689	0.939998	0.635916	0.877858	0.010620	0.114813
0.800	0.969902	0.948657	0.674433	0.892503	0.008852	0.101977
0.825	0.974722	0.956718	0.713495	0.906850	0.007274	0.089118
0.850	0.979184	0.964231	0.753072	0.920913	0.005864	0.076259
0.875	0.983319	0.971239	0.793137	0.934704	0.004602	0.063418
0.900	0.987156	0.977783	0.833668	0.948237	0.003471	0.050613
0.925	0.990721	0.983899	0.874639	0.961522	0.002458	0.037858
0.950	0.994036	0.989621	0.916031	0.974572	0.001549	0.025164
0.975	0.997123	0.994979	0.957824	0.987394	0.000733	0.012542

m=10 c=10

r	R2	R3	R4	b	S0	Q0
0.025	0.249987	0.000270	0.000000	0.200000	0.082086	0.000216
0.050	0.495446	0.027326	0.000000	0.333337	0.006769	0.018217
0.075	0.697901	0.162112	0.000034	0.428623	0.000597	0.092627
0.100	0.823359	0.353456	0.000347	0.500245	0.000064	0.176641
0.125	0.891393	0.516916	0.001466	0.556257	0.000009	0.229378
0.150	0.928668	0.635867	0.003941	0.601491	0.000002	0.253398
0.175	0.950341	0.719766	0.008170	0.639001	0.000000	0.259835
0.200	0.963778	0.779578	0.014379	0.670791	0.000000	0.256644
0.225	0.972595	0.823189	0.022670	0.698224	0.000000	0.248419
0.250	0.978660	0.855771	0.033058	0.722257	0.000000	0.237684
0.275	0.982998	0.880674	0.045508	0.743580	0.000000	0.225823
0.300	0.986204	0.900101	0.059956	0.762701	0.000000	0.213593
0.325	0.988637	0.915534	0.076322	0.780006	0.000000	0.201412
0.350	0.990526	0.927988	0.094521	0.795790	0.000000	0.189504
0.375	0.992022	0.938179	0.114465	0.810287	0.000000	0.177985
0.400	0.993226	0.946622	0.136069	0.823679	0.000000	0.166909
0.425	0.994209	0.953692	0.159251	0.836118	0.000000	0.156293
0.450	0.995022	0.959669	0.183934	0.847723	0.000000	0.146135
0.475	0.995701	0.964767	0.210046	0.858597	0.000000	0.136421
0.500	0.996274	0.969149	0.237518	0.868822	0.000000	0.127131
0.525	0.996763	0.972940	0.266287	0.878469	0.000000	0.118242
0.550	0.997182	0.976242	0.296294	0.887599	0.000000	0.109731
0.575	0.997544	0.979133	0.327484	0.896262	0.000000	0.101574
0.600	0.997858	0.981679	0.359806	0.904503	0.000000	0.093748
0.625	0.998134	0.983930	0.393212	0.912360	0.000000	0.086232
0.650	0.998376	0.985931	0.427658	0.919867	0.000000	0.079006
0.675	0.998589	0.987715	0.463102	0.927053	0.000000	0.072051
0.700	0.998779	0.989312	0.499506	0.933944	0.000000	0.065350
0.725	0.998948	0.990746	0.536833	0.940563	0.000000	0.058887
0.750	0.999099	0.992039	0.575050	0.946930	0.000000	0.052648
0.775	0.999234	0.993207	0.614125	0.953063	0.000000	0.046618
0.800	0.999356	0.994266	0.654028	0.958980	0.000000	0.040785
0.825	0.999466	0.995227	0.694731	0.964694	0.000000	0.035138
0.850	0.999565	0.996103	0.736207	0.970219	0.000000	0.029665
0.875	0.999656	0.996901	0.778431	0.975566	0.000000	0.024358
0.900	0.999738	0.997632	0.821381	0.980748	0.000000	0.019206
0.925	0.999812	0.998301	0.865033	0.985773	0.000000	0.014202
0.950	0.999880	0.998915	0.909366	0.990652	0.000000	0.009338
0.975	0.999943	0.999480	0.954362	0.995391	0.000000	0.004606

ロ) 同時確率, $m=2$ ($c=2, c=3$) について, service 中の客の数を表示した平衡方程式を解き (解法は [8] 参照) 同時確率と表示しておく。分類は full 稼働かどうかで区別し。

(f, f) は 両方の窓口とも full 稼働で満員,

(n, f) は 一方は full 稼働で満員だが, 他は full 稼働でなく余裕がある (not full).

(n, n) は 両方とも full 稼働でなく, 共に「透」いている状態.

例えば $m=2, c=2$ で示せば,

$$(f, f); \sum_{n=0}^{\infty} P_n(2, 2), \quad (n, f); P_0(0, 2) + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1, 2)$$

$$(n, n); P_0 + P_0(0, 1) + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1, 1) \quad \text{である.}$$

(ただし平衡確率 $P_n(i_1, i_2)$ における n は待ち客数を, i_1, i_2 はそれぞれ service 中の客の数であり $i_1 \leq i_2$)

ハ) 推移確率, $m=1$ ($c=2, 3, \dots, 10$), $m=2$ ($c=2, c=3$) について, service 終了にともない, その窓口での service 人数の推移で分類し,

[f, f] は full 稼働から full 稼働へ, [n, n] は 透から透へ

[f, n] は full 稼働から 透へ, [n, f] は 透から full 稼働へ

例えば $m=2, c=2$ では, [f, f]; $\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} P_n(1, 2) + \sum_{n=2}^{\infty} P_n(2, 2)$,

[n, n]; $P_1(1, 1) + \frac{1}{2} P_1(1, 2)$, [f, n]; $\frac{1}{2} P_1(1, 2)$,

[n, f]; $\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} P_n(1, 2) + \sum_{n=2}^{\infty} P_n(1, 1)$ である.

m=2 c=2

r	(n,n)	(n,f)	(f,f)	[n,n]	[n,f]	[f,n]	[f,f]
.05	.999700	.000299	.000002	.001487	.000149	.000013	.000002
.10	.996320	.003598	.000083	.008866	.001799	.000266	.000083
.15	.985577	.013764	.000660	.022302	.006882	.001369	.000660
.20	.964412	.032921	.002668	.039362	.016460	.003974	.002668
.25	.931685	.060850	.007465	.057180	.030425	.008447	.007465
.30	.887877	.095519	.016604	.073417	.047759	.014756	.016604
.35	.834515	.133883	.031603	.086534	.066941	.022523	.031603
.40	.773633	.172592	.053775	.095750	.086296	.031136	.053775
.45	.707375	.208480	.084145	.100864	.104240	.039877	.084145
.50	.637746	.238838	.123415	.102060	.119419	.048020	.123415
.55	.566483	.261532	.171985	.099751	.130766	.054899	.171985
.60	.495007	.275003	.229990	.094451	.137501	.059944	.229990
.65	.424427	.278220	.297353	.086703	.139110	.062699	.297353
.70	.355572	.270598	.373831	.077020	.135299	.062817	.373831
.75	.289029	.251908	.459063	.065868	.125954	.060057	.459063
.80	.225190	.222200	.552610	.053649	.111100	.054265	.552610
.85	.164292	.181721	.653987	.040701	.090861	.045361	.653987
.90	.106453	.130863	.762684	.027302	.065432	.033326	.762684
.95	.051701	.070110	.878189	.013676	.035055	.018185	.878189
r	(n,n)	(n,f)	(f,f)	[n,n]	[n,f]	[f,n]	[f,f]

m=2 c=3

r	(n,n)	(n,f)	(f,f)	[n,n]	[n,f]	[f,n]	[f,f]
.10	.996801	.003161	.000038	.027813	.001580	.000373	.000043
.20	.960955	.036895	.002150	.108216	.018447	.006667	.002534
.25	.923028	.070324	.006647	.147120	.035162	.013976	.007901
.30	.872951	.111412	.015637	.177547	.055706	.023516	.018581
.40	.747217	.199550	.053234	.208039	.099775	.044819	.062273
.50	.605252	.270728	.124020	.203658	.135364	.062118	.141443
.60	.462698	.305538	.231761	.176316	.152769	.070229	.256921
.70	.328306	.295476	.376215	.136455	.147738	.067376	.405404
.80	.205960	.239214	.554823	.091216	.119607	.053854	.582000
.90	.096680	.139304	.764016	.044931	.069652	.030894	.781694
.95	.046827	.074283	.878890	.022200	.037141	.016344	.888771
r	(n,n)	(n,f)	(f,f)	[n,n]	[n,f]	[f,n]	[f,f]

推移確率とは、「空」への推移を抜いてある。rが小さい所では、
「空」への推移確率が大きい。この値は1から各項減じられてある。

m=2 c=2

r	EL _g	EL	sL _g	sL	VL _g	VL
.05	0.00182	0.20182	0.04669	0.45364	0.002180	0.205786
.10	0.01328	0.41328	0.13630	0.66671	0.018578	0.444499
.15	0.04116	0.64116	0.25630	0.86274	0.065688	0.744325
.20	0.09003	0.89003	0.40176	1.06275	0.161409	1.129443
.25	0.16328	1.16328	0.57023	1.27372	0.325164	1.622352
.30	0.26388	1.46388	0.76125	1.49903	0.579501	2.247093
.35	0.39519	1.79519	0.97632	1.74166	0.953200	3.033376
.40	0.56166	2.16166	1.21911	2.00552	1.486235	4.022116
.45	0.76967	2.56967	1.49590	2.29644	2.237725	5.273622
.50	1.02866	3.02866	1.81641	2.62318	3.299338	6.881073
.55	1.35283	3.55283	2.19533	3.44501	4.819456	8.994645
.60	1.76408	4.16408	2.65515	3.99447	7.049831	11.868092
.65	2.29742	4.89742	3.23152	4.70465	10.442705	15.955780
.70	3.01177	5.81177	3.98396	5.68014	15.871954	22.133752
.75	4.01380	7.01380	5.01971	7.13255	25.197449	32.264027
.80	5.51739	8.71739	6.55315	9.55925	42.943762	50.873253
.85	8.02222	11.42222	9.08442	14.45798	82.526771	91.379280
.90	13.02801	16.62801	14.11367	29.32723	199.195815	209.033298
.95	28.03455	31.83455	29.14104	849.200340	860.086462	
r	EL _g	EL	sL _g	sL	VL _g	VL

m=2 c=3

r	EL _g	EL	sL _g	sL	VL _g	VL
.10	0.038868	0.638868	0.246934	0.860427	0.060976	0.740335
.20	0.222497	1.422497	0.675825	1.457638	0.456739	2.124707
.25	0.372918	1.872918	0.922151	1.773431	0.850362	3.145056
.30	0.560815	2.360814	1.187066	2.101596	1.409126	4.416704
.40	1.056469	3.456469	1.790944	2.810690	3.207480	7.899978
.50	1.758278	4.758277	2.558401	3.645288	6.545414	13.288124
.60	2.798149	6.398135	3.637344	4.735898	13.230269	22.428726
.70	4.504693	8.704672	5.366996	6.396314	28.804649	40.912828
.80	7.876218	12.676199	8.753119	9.598767	76.617088	92.136336
.90	17.911768	23.311768	18.796886	19.307879	353.322916	372.794208
.95	37.928448	43.628448	38.815841	39.093876	1506.669499	1528.331142
r	EL _g	EL	sL _g	sL	VL _g	VL

EL_g, VL_g は 待ち行列内容数の平均及び分散

EL, VL は 系内容数の平均及び分散

$$sL_g = \sqrt{VL_g}, \quad sL = \sqrt{VL}$$

m=1 c=2	γ					
	0.05	0.09161	0.90083	0.00813	0.00081	0.00013
	0.10	0.17082	0.80567	0.02620	0.00524	0.00132
	0.15	0.24162	0.71655	0.04738	0.01421	0.00456
	0.20	0.30623	0.63429	0.06764	0.02705	0.01006
	0.25	0.36603	0.55907	0.08486	0.04243	0.01746
	0.30	0.42195	0.49068	0.09812	0.05887	0.02611
	0.35	0.47468	0.42872	0.10719	0.07504	0.03526
	0.40	0.52470	0.37270	0.11225	0.08980	0.04420
	0.45	0.57238	0.32209	0.11364	0.10227	0.05229
	0.50	0.61803	0.27639	0.11180	0.11180	0.05902
	0.55	0.66190	0.23510	0.10720	0.11792	0.06397
	0.60	0.70416	0.19778	0.10028	0.12033	0.06684
	0.65	0.74499	0.16399	0.09142	0.11885	0.06740
	0.70	0.78452	0.13338	0.08099	0.11339	0.06550
	0.75	0.82288	0.10561	0.06931	0.10396	0.06105
	0.80	0.86015	0.08038	0.05662	0.09060	0.05400
	0.85	0.89642	0.05743	0.04317	0.07340	0.04434
	0.90	0.93178	0.03651	0.02915	0.05247	0.03209
	0.95	0.96629	0.01743	0.01471	0.02796	0.01729

m=1 c=3	γ	b	S_0	[n,n]	[n,f]	[f,n]	[f,f]
	0.05	0.13069	0.85284	0.01883	0.00033	0.00008	0.00000
	0.10	0.23304	0.71883	0.06065	0.00341	0.00131	0.00015
	0.15	0.31734	0.60271	0.10786	0.01150	0.00552	0.00120
	0.20	0.38937	0.50439	0.15029	0.02459	0.01343	0.00466
	0.25	0.45254	0.42195	0.18349	0.04129	0.02453	0.01228
	0.30	0.50902	0.35298	0.20637	0.05970	0.03765	0.02563
	0.35	0.56026	0.29518	0.21947	0.07805	0.05146	0.04589
	0.40	0.60727	0.24658	0.22404	0.09489	0.06477	0.07384
	0.45	0.65081	0.20551	0.22150	0.10910	0.07656	0.10990
	0.50	0.69141	0.17062	0.21321	0.11993	0.08609	0.15420
	0.55	0.72953	0.14084	0.20038	0.12687	0.09282	0.20671
	0.60	0.76548	0.11527	0.18402	0.12962	0.09638	0.26723
	0.65	0.79956	0.09321	0.16499	0.12803	0.09654	0.33547
	0.70	0.83197	0.07409	0.14395	0.12208	0.09318	0.41112
	0.75	0.86290	0.05743	0.12147	0.11181	0.08626	0.49380
	0.80	0.89250	0.04287	0.09799	0.09731	0.07580	0.58315
	0.85	0.92091	0.03008	0.07385	0.07872	0.06185	0.67879
	0.90	0.94824	0.01881	0.04934	0.05620	0.04449	0.78038
	0.95	0.97457	0.00884	0.02466	0.02990	0.02384	0.88755

[n,f] と [f,n] の確率の大きな値は $\gamma=0.6$ 前後で、

γ が小さいとき、 γ が大きいときは、片方に寄ってしまう。

m=1

	b	S_0	[n,n]	[n,f]	[f,n]	[f,f]
	$r = 0.50$					
c= 2	0.61803	0.27639	0.11180	0.11180	0.05902	0.16459
c= 3	0.69141	0.17062	0.21321	0.11993	0.08609	0.15420
c= 4	0.74127	0.11455	0.28998	0.12210	0.09904	0.14525
c= 5	0.77731	0.08179	0.34747	0.12228	0.10570	0.13828
c= 6	0.80455	0.06116	0.39138	0.12177	0.10933	0.13286
c= 7	0.82587	0.04739	0.42572	0.12104	0.11138	0.12859
c= 8	0.84300	0.03777	0.45319	0.12026	0.11256	0.12516
c= 9	0.85707	0.03079	0.47560	0.11951	0.11322	0.12235
c=10	0.86882	0.02556	0.49421	0.11881	0.11359	0.12001
	$r = 0.55$					
c= 2	0.66190	0.23510	0.10720	0.11792	0.06397	0.21718
c= 3	0.72953	0.14084	0.20038	0.12687	0.09282	0.20671
c= 4	0.77470	0.09290	0.26935	0.12966	0.10665	0.19708
c= 5	0.80698	0.06559	0.32038	0.13035	0.11389	0.18942
c= 6	0.83118	0.04867	0.35908	0.13027	0.11796	0.18342
c= 7	0.85000	0.03750	0.38923	0.12989	0.12035	0.17865
c= 8	0.86504	0.02976	0.41328	0.12941	0.12181	0.17481
c= 9	0.87735	0.02418	0.43287	0.12891	0.12271	0.17164
c=10	0.88760	0.02003	0.44912	0.12842	0.12327	0.16901
	$r = 0.60$					
c= 2	0.70416	0.19778	0.10028	0.12033	0.06684	0.27744
c= 3	0.76548	0.11527	0.18402	0.12962	0.09638	0.26723
c= 4	0.80581	0.07486	0.24486	0.13285	0.11057	0.25722
c= 5	0.83432	0.05234	0.28944	0.13397	0.11810	0.24914
c= 6	0.85554	0.03858	0.32309	0.13427	0.12243	0.24275
c= 7	0.87195	0.02959	0.34921	0.13422	0.12506	0.23766
c= 8	0.88501	0.02339	0.37003	0.13402	0.12673	0.23354
c= 9	0.89566	0.01896	0.38696	0.13376	0.12782	0.23014
c=10	0.90450	0.01567	0.40100	0.13348	0.12856	0.22730
	$r = 0.65$					
c= 2	0.74499	0.16399	0.09142	0.11885	0.06740	0.34514
c= 3	0.79956	0.09321	0.16499	0.12803	0.09654	0.33547
c= 4	0.83493	0.05970	0.21759	0.13151	0.11056	0.32543
c= 5	0.85970	0.04138	0.25586	0.13296	0.11810	0.31721
c= 6	0.87801	0.03033	0.28462	0.13357	0.12251	0.31067
c= 7	0.89210	0.02317	0.30692	0.13381	0.12527	0.30544
c= 8	0.90327	0.01826	0.32466	0.13385	0.12707	0.30119
c= 9	0.91235	0.01476	0.33909	0.13381	0.12829	0.29769
c=10	0.91987	0.01218	0.35104	0.13372	0.12914	0.29476
	$r = 0.70$					
c= 2	0.78452	0.13338	0.08099	0.11339	0.06550	0.41999
c= 3	0.83197	0.07409	0.14395	0.12208	0.09318	0.41112
c= 4	0.86231	0.04687	0.18838	0.12562	0.10652	0.40138
c= 5	0.88338	0.03225	0.22052	0.12727	0.11378	0.39332
c= 6	0.89886	0.02351	0.24461	0.12812	0.11810	0.38689
c= 7	0.91071	0.01790	0.26325	0.12858	0.12085	0.38173
c= 8	0.92008	0.01407	0.27808	0.12883	0.12270	0.37753
c= 9	0.92767	0.01135	0.29014	0.12896	0.12398	0.37406
c=10	0.93394	0.00935	0.30013	0.12903	0.12490	0.37115
	b	S_0	[n,n]	[n,f]	[f,n]	[f,f]

REFERENCES

- [1] Arora, K. L. (1964)
 Tow-server bulk-service queuing process.
 Oper. res. 12, 286-294
- [2] Bailey, N. T. J. (1954)
 On queueing processes with bulk service.
 Journal of the Royal Statistical Society, B, 16, 80-87
- [3] Cromie, M. V. & Chaudhry, M. L. (1976)
 Analytically explicit results for the queueing system
 $M/M(x)/c$ with charts and tables for certain measures
 of efficiency.
 Oper. Res. Quart. 27, 733-745
- [4] Downton, F. (1955)
 Waiting time in bulk service queues.
 Journal of the Royal Statistical Society, B, 17, 256-261
- [5] Downton, F. (1956)
 On limiting distributions arising in bulk service queues.
 Journal of the Royal Statistical Society, B, 18, 265-274
- [6] Ghare, P. M. (1968)
 Multichannel queueing system with bulk service.
 Oper. Res. 16, 189-192
- [7] Ishikawa, A. (1984)
 Stationary waiting time distribution in a $GI/E_k/m$ queue.
 Journal of the Operations Research Society of Japan, 27, 130-150
- [8] 石川明彦 (1985)
 団子の効果
 数理科学講究録 564 待ち行列理論とその周辺 250-262
- [9] Jaiswal, N. K. (1960)
 Bulk-service queueing problem.
 Oper. Res. 8, 139-143
- [10] Jaiswal, N. K. (1960)
 Time-dependent solution of the bulk-service queueing
 problem.
 Oper. Res. 8, 773-781
- [11] Kashyap, B. R. K. (1966)
 The double-ended queue with bulk service and limited
 waiting space.
 Oper. Res. 14, 822-834
- [12] Keilson, J. (1962)
 The general bulk queue as a Hilbert problem.
 Journal of the Royal Statistical Society, B, 24, 344-358

- [13] Milier, R. G. (1959)
A contribution to the theory of bulk queues.
Journal of the Royal Statistical Society, B, 21, 320-337
- [14] Neuts, M. F. (1965)
The busy period of a queue with batch service.
Oper. Res. 13, 815-819
- [15] Sim, S. H. & Templeton J. G. C. (1985)
Steady state results for the $M/M(a,b)/c$ batch-service system.
European Journal of Operational Research, 21, 260-267
- [16] 寺田寅彦 (1950)
電車の混雑に就いて
寺田寅彦全集 文学篇 第2巻 265-279 (岩波書店)
- [17] Tumura, Y. (1966)
On the steady state probabilities concerned
with tandem queue.
T. R. U. Math. 2, 1-11
- [18] Tumura, Y. & Ishikawa, A. (1978)
Numerical calculation of the tandem queueing system.
T. R. U. Math. 14-1, 57-70